

Sprawdzian

po klasie 10 na Litwie

Sprawdzian po 10 klasie na Litwie jest nieobowiązkowy, ale jednolity w całym kraju.

■ WALERY JAGLIŃSKI

Szkoła podstawowa na Litwie ma 10 klas, po których ukończeniu uczniowie mają nieobowiązkowy sprawdzian wiedzy z języka państwowego, języka ojczystego i matematyki. Ujednolicony, ogólnolitewski sprawdzian wiedzy z matematyki oraz części pisemne sprawdzianów z języka polskiego i litewskiego są bardzo podobne do odpowiednich egzaminów maturalnych, części ustne sprawdzianów wiedzy z języka polskiego i litewskiego przebiegają zaś w taki sam sposób, jak zaliczenia ustne z tych przedmiotów w klasie maturalnej. Przyступując do tych sprawdzianów, uczeń może sprawdzić swoją wiedzę w stosunku do obiektywnych oczekiwań.

Chęć wzięcia udziału w sprawdzianie deklarują uczniowie klas dziesiątych w terminie do 15 stycznia.

Przedstawiamy zadania z arkuszy egzaminacyjnych z matematyki po roku szkolnym 2008/09 i 2007/08. W oryginal-

nych arkuszach redakcja dokonała zmian tak, aby arkusze mogły zostać użyte w polskich szkołach. Po pierwsze, zmieniono układ zadań tak, aby treści pojawiające się w Polsce dopiero w pierwszej klasie liceum (równania kwadratowe, funkcja kwadratowa oraz nierówności) znalazły się na końcu. Po drugie, jedno z zadań przedstawiono w dwóch wariantach: licealnym i gimnazjalnym, po trzecie wreszcie, zwiększono liczbę zadań w arkuszu z 2008 tak, aby oba arkusze miały podobny poziom trudności i taką samą liczbę punktów¹. Redakcja zdecydowała też o zamianie polskich imion pojawiających się w zadaniach tekstowych na imiona litewskie.

Dotychczas zadania z matematyki na sprawdzianie wiedzy po szkole podstawowej są tłumaczone na języki mniejszości narodowych, podobnie jak karta wzorów; w przyszłości uczniowie mają otrzymać, tak jak teraz na maturze, arkusze z zadaniami wyłącznie w języku litewskim.

Zadania są opracowane przez Narodowe Centrum Egzaminacyjne, które jest

¹ Oryginalny arkusz z 2008 był obliczony na 45 punktów, podczas gdy ten z roku 2009 na 55 punktów.

państwową instytucją, odpowiedzialną za organizację i przebieg egzaminów maturalnych, zaliczeń, sprawdzianu wiedzy za okres szkoły podstawowej oraz egzaminów z języka państwowego i wiedzy o konstytucji Republiki Litewskiej. Instytucja ta koordynuje również na Litwie badania międzynarodowe z zakresu oświaty.

Formularz sprawdzianu rozpoczyna karta wzorów. Uczeń może ponadto korzystać tylko z przyborów do pisania, kreślenia oraz kalkulatora bez pamięci tekstowej. Uczniowie mają na wypełnienie testu 2 godziny zegarowe.

W jednym z najbliższych numerów zaprezentujemy litewskie zadania maturalne.

WZORY

Wzór procentów składanych. $S_n = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, gdzie S – wielkość początkowa, p – oprocentowanie, n – liczba okresów.

Rozkład trójkianu kwadratowego na czynniki: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Funkcje trygonometryczne. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan \alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Trójkąt. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, $S = rp = \frac{abc}{4R}$,

gdzie a, b, c – boki trójkąta, A, B, C – kąty przeciwległe, p – pół obwodu, r i R – promienie okręgu wpisanego i opisanego, S – pole.

Suma miar kątów wielokąta $180^\circ(n - 2)$, gdzie n – liczba kątów wielokąta.

Wycinek koła. $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$, gdzie α – miara kąta środkowego w stopniach,

S – pole wycinka, l – długość łuku wycinka, R – promień okręgu.

Objętość graniastopu. $V = SH$, gdzie S – pole podstawy, H – wysokość graniastopu.

Objętość ostrosłupa. $V = \frac{1}{3}SH$, gdzie S – pole podstawy, H – wysokość ostrosłupa.

Objętość stożka. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $V = \frac{1}{3}SH$, gdzie R – promień podstawy, H – wysokość stożka,

S – pole podstawy.

Pole powierzchni bocznej stożka. $S = \pi Rl$, gdzie l – tworząca, R – promień podstawy stożka.

Objętość walca. $V = \pi R^2 H$, gdzie R – promień podstawy walca, H – wysokość walca.

Pole powierzchni bocznej walca. $S = 2\pi RH$, gdzie R – promień podstawy, H – wysokość walca.

Objętość kuli. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, gdzie R – promień kuli.

Pole powierzchni kuli. $S = 4\pi R^2$, gdzie R – promień kuli.

Rok 2008 (44 + 9 punktów)

Czas: 2 godziny

1 Oblicz:

a) (1 punkt) $\frac{1}{3} - 0,5$;

b) (1 punkt) $7 : \frac{1}{7}$;

c) (1 punkt) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$;

d) (1 punkt) 1% liczby 500;

e) (1 punkt) 3^4 .

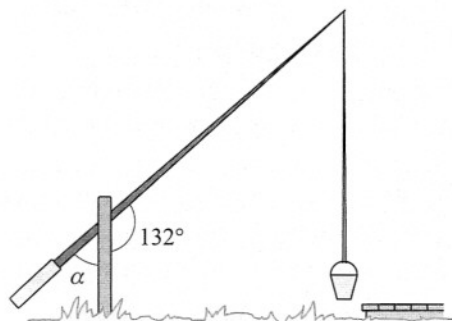
2 Uprość:

a) (1 punkt) $2a + 4b + 6,5a - b$;

b) (1 punkt) $6 - (a - 6)$;

c) (1 punkt) $\frac{2a^8}{a^2}$;

d) (2 punkty) $\left(\frac{2x+1}{7} + \frac{2-x}{7}\right) \cdot \frac{1}{x+3}$.

3² (1 punkt) Oblicz miarę kąta α :

4 Rozwiąż równania:

a) (2 punkty) $3x - 100 = x - 2$.

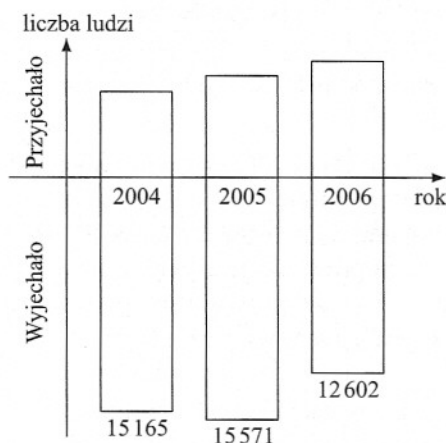
b) (3 punkty)

liceum: $x^2 - 3x - 4 = 0$

gimnazjum: $(x - 4)(x + 1) = 0$

2 zadanie dodane przez redakcję

5 Neringa³ znalazła w czasopiśmie diagram, przedstawiający dane o liczbie ludzi, którzy przyjechali, aby zamieszkać na Litwie oraz tych, którzy z Litwy wyjechali.

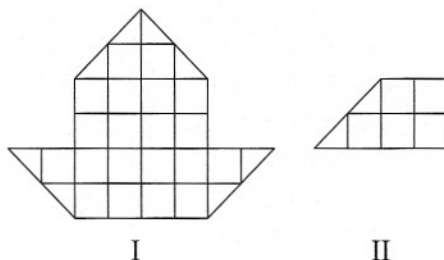


Pomóż dziewczynce odpowiedzieć na pytania:

a) (1 punkt) Ile osób łącznie zamieszkało na Litwie w okresie 2004–2006 r.?

b) (1 punkt) W którym roku z Litwy wyjechało najmniej osób?

6 (1 punkt) Tomas⁴ wyciął z kratkowego papieru dwie figury. Jaką część figury (I) stanowi figura (II)? Odpowiedź zapisz w postaci ułamka.



3 W polskim tłumaczeniu dziewczynka miała na imię Natalia.

4 W polskim wariacie Tomek.

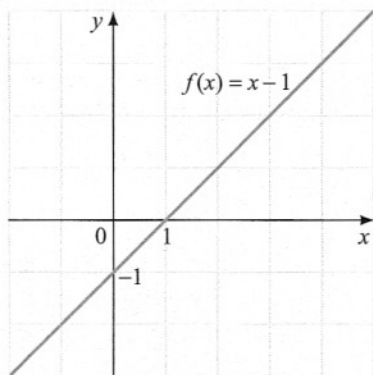
7 W szkole ma się odbyć impreza i należy wybrać prowadzących. Organizatorzy postanowili ich wylosować. Zgłosiło się 5 dziewcząt i 3 chłopców.

a) (1 punkt) Ile istnieje możliwości wyboru jednego prowadzącego?

b) (1 punkt) Ile istnieje możliwości wyboru pary prowadzących (dziewczyny i chłopca)?

c) (2 punkty) Która sytuacja jest bardziej prawdopodobna przy losowym wyborze tylko jednego prowadzącego imprezę: A – „na prowadzącą wybrano dziewczynę”, B – „na prowadzącego wybrano chłopca”? Odpowiedź uzasadnij.

8 Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = x - 1$ narysowanego poniżej:



a) (1 punkt) ustal współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji i osi Ox ;

b) (1 punkt) porównaj wartości funkcji dla argumentów 3 i 0;

c) (1 punkt) ustal, dla której wartości zmiennej niezależnej wartość funkcji jest równa 1.

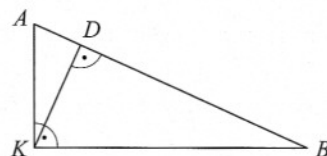
9 (2 punkty) Departament Statystyki podał przybliżone dane: jak na początku roku szkolnego 2006–2007 szkoły ogólnokształcące zostały zaopatrzone w sprzęt komputerowy.

Liczba komputerów, mających dostęp do internetu

Łącznie komputerów	Łącznie	%
44740	?	80

Ile komputerów, mających dostęp do internetu, było w szkołach na początku roku szkolnego 2006–2007? Odpowiedź podaj z dokładnością do setek.

10 Przyprostokątne trójkąta prostokątnego AKB są równe 5 dm i 12 dm.



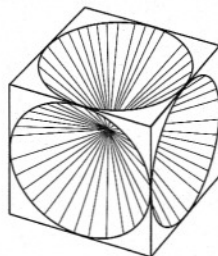
Oblicz:

a) (1 punkt) długość boku AB trójkąta;

b) (1 punkt) pole trójkąta AKB ;

c) (2 punkty) wysokość KD trójkąta. Odpowiedź zapisz z dokładnością do 0,1 dm.

11 W warsztacie szkolnym uczniowie przerabiali drewniane półfabrykaty. Z sześcienu o krawędzi 10 cm Stasys wyciął sześć stożków.



Stożki miały wspólny wierzchołek w środku sześcienu. Otrzymany detal (na rysunku) Stasys postanowił pomalować.



a) (1 punkt) Wyznacz pole jednej ściany sześcienu.

b) (2 punkty) Oblicz pole podstawy stożka.

c) (3 punkty) Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

d) (2 punkty) Oblicz pole powierzchni otrzymanego detalu, który Stasys postanowił pomalować, przyjmując $\pi \approx 3,14$. Odpowiedź zapisz z dokładnością do liczb całkowitych.

12 (4 punkty) Jeden brzeg działki w kształcie prostokąta jest o 7 metrów krótszy od drugiego. Powierzchnia działki wynosi 1710 m^2 . Działkę ogrodzono. Jaka jest długość ogrodzenia tej działki?

Liceum

13⁵ (3 punkty) Rozwiąż nierówność $6x \geq -24$ i przedstaw na osi liczbowej jej rozwiązanie. Wyznacz najmniejsze naturalne rozwiązanie tej nierówności.

14 (6 punktów) Dana jest figura ograniczona parabolą $f(x) = 4 - x^2$ i osią Ox . W tę figurę wpisano prostokąt, którego dwa wierzchołki leżą na paraboli, a pozostałe dwa – na osi Ox . Wyznacz takie długości boków tego prostokąta, aby jego obwód był największy.

Rozwiązania

1. a) $-\frac{1}{6}$, b) 49, c) $2\sqrt{3}$, d) 5.

2. a) $8,5a + 3b$, b) $12 - a$, c) $2a^6$, d) $\frac{1}{7}$, e) 81

3. 48° .

4. a) $x = 49$, b) $x = -1$ lub $x = 4$.

5. a) $5553 + 6789 + 7745 = 20087$, b) 2006.

6. $\frac{1}{4}$

7. a) 8, b) $5 \cdot 3 = 15$, c) A (w grupie chętnych jest więcej dziewcząt).

8. a) (1, 0), b) $f(3) > f(0)$,

c) $x = 2$ ($f(2) = 1$).

9. $44740 \cdot \frac{80}{100} = 35792 \approx 35800$.

10. a) $|AB| = \sqrt{|AK|^2 + |BK|^2} = 13 \text{ dm}$,

b) $P_{AKB} = \frac{1}{2} |AK| \cdot |BK| = 30 \text{ dm}^2$,

c) $P_{AKB} = \frac{1}{2} |KD| \cdot |AB|$, zatem

$|KD| = \frac{2P_{AKB}}{|AB|} = \frac{60}{13} \approx 4,6 \text{ dm}$.

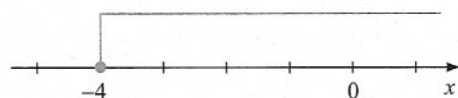
11. a) $P_S = 100 \text{ cm}^2$, b) $P_p = \pi r^2$, ale $r = 5$, czyli $P_p = 25\pi \text{ cm}^2$,

c) $P_b = \pi r l$. Ponieważ $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 5\sqrt{2}$, zatem $P_b = 25\sqrt{2} \cdot \pi \text{ cm}^2$,

d) $P_d = 6(P_b + (P_S - P_p)) = 6 \cdot (100 + 25\pi(\sqrt{2} - 1)) \approx 793 \text{ cm}^2$.

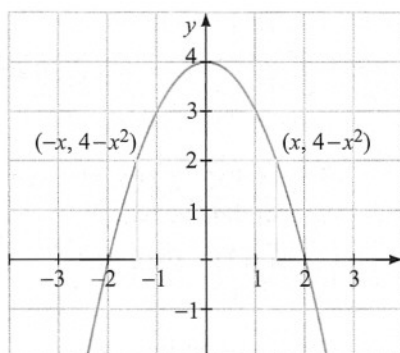
12. $1710 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = 45 \cdot 38$ lub $x(x+7) = 1710$ stąd $x^2 + 7x - 1710 = 0$, zatem – ponieważ $x > 0$, więc $x = 38$. Długość ogrodzenia, obwód prostokąta, wynosi 166 m.

13. $x \geq -4$, najmniejsze naturalne rozwiązanie to $x = 0$.



14. Boki prostokąta mają długości: x oraz $4 - x^2$, zatem jego obwód wynosi: $O(x) = 4x + 2 \cdot (4 - x^2) = -2x^2 + 4x + 8$, skąd znajdujemy $x_w = 1$

⁵ zadanie dodane przez redakcję



Największy obwód ma prostokąt, gdy $x = x_w = 1$. Boki prostokąta mają wówczas długości: 2 i 3.

Rok 2009 (44 + 9 punktów)

Czas: 2 godziny.

1 Oblicz:

a) (1 punkt) $\frac{4}{9} - \frac{2}{9}$;

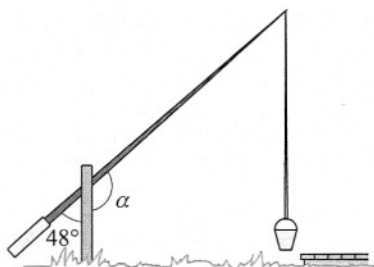
b) (1 punkt) $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5}$;

c) (1 punkt) 2^4 ;

d) (1 punkt) $\sqrt{19}$ z dokładnością do 0,1;

e) (2 punkty) $\frac{7}{9} : \frac{2}{9}$.

2 (1 punkt) Oblicz miarę kąta α :



3 Rozwiąż równania:

a) (1 punkt) $2 + x = 15$

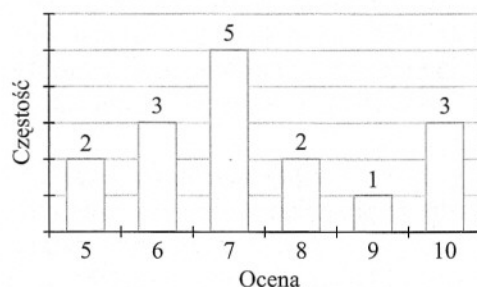
b) (3 punkty) liceum: $x^2 - 4x - 5 = 0$; gimnazjum: $(x - 5)(x + 1) = 0$

4 Uprość:

a) (1 punkt) $5a + 2b - 3,5a$;

b) (3 punkty) $(a - 3)^2 + 3a \cdot 5$.

5 Diagram słupkowy przedstawia oceny, które Jan dostał z historii w ciągu roku szkolnego.



a) (1 punkt) Ile łącznie ocen dostał Jan?

b) (2 punkty) Jaka jest średnia arytmetyczna jego ocen?

c) (1 punkt) Jaki procent wszystkich ocen stanowią ósemki?

6 Sklep ogłosił akcję „2 + 1 GRATIS”. W ulotce reklamowej napisano: „Kupując 2 serki, trzeci otrzymasz gratis”.



W czasie akcji Linas wybrał 3 serki i włożył je do koszyka na zakupy.

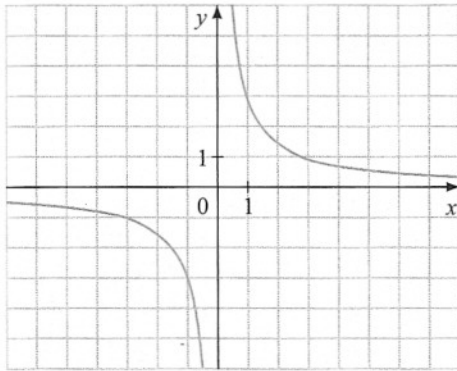
a) (1 punkt) Ile Linas zapłacił za 3 serki?

b) (1 punkt) Po powrocie do domu Linas obliczył średnią cenę jednego serka. Jaka jest ta cena?

c) (1 punkt) Ile zapłaciłby Linas, gdyby w czasie akcji do koszyka na zakupy włożył cztery serki?

7 (3 punkty) Elektryk instaluje przewody elektryczne i ma do tego drut izolowany koloru zielonego, niebieskiego, białego i czerwonego. Dobierając różne kolory, może on zainstalować oddzielne przewody składające się z dwóch drutów. Ile różnych przewodów może zainstalować elektryk, używając 4 kolorów (nie można instalować przewodów z drutu tego samego koloru, np., zielonego i zielonego itd.)?

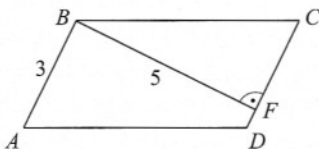
8 Na podstawie poniższego wykresu funkcji $y = \frac{k}{x}$ wyznacz:



a) (1 punkt) wartość y , gdy $x = -3$;

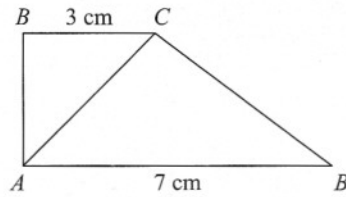
b) (1 punkt) wartość x , gdy $y = 3$.

9 (2 punkty) Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym BF jest wysokością.



Wiedząc, że $|BF| = 5$ oraz $|AB| = 3$, oblicz pole równoległoboku.

10 Krótsza przekątna trapezu prostokątnego $ABCD$ jest dwusieczną kąta prostego. Podstawy mają długość 3 cm i 7 cm.



a) (1 punkt) Uzasadnij, że $\angle BAC = \angle BCA$;

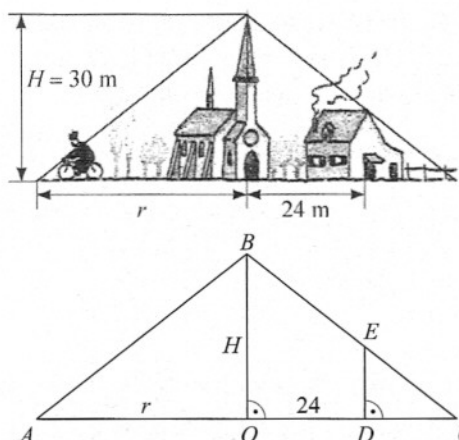
b) (1 punkt) Uzasadnij, że $|AB| = 3$ cm;

c) (3 punkty) Udowodnij, że $|CD| = 5$ cm;

d) (1 punkt) Oblicz obwód trapezu.

11 (3 punkty) Thomas Edison (1847–1931) miał świetne poczucie humoru. Jego goście często dziwili się, dlaczego tak ciężko porusza się brama przy wejściu do jego domu. Nareszcie jeden z przyjaciół wielkiego wynalazcy ośmielił się mu powiedzieć: „Taki genialny technik jak ty mógłby naprawić bramę, aby się porządnie otwierała”. Edison, uśmiechając się, odpowiedział: „Moja brama jest bardzo mądrze wmontowana. Podłączyłem ją do zbiornika. Każdy wchodzący wpompowuje do niego 20 litrów wody”. Gdyby, zamiast naczynia o pojemności 20 litrów, Edison użył do napełniania zbiornika naczynia o pojemności 25 litrów, to do napełnienia całego zbiornika byłoby potrzeba o 12 osób mniej. Jaka była pojemność zbiornika na wodę?

12 Na wieży zainstalowano piorunochron, który dookoła wieży tworzy strefę ochronną w kształcie stożka. Wysokość H stożka ma długość 30 m i jest równa połowie długości promienia r podstawy stożka. Dom jest odległy od wieży o 24 m (patrz rysunki).



- a) (1 punkt) Wyznacz wartość r .
 b) (1 punkt) Wyznacz długość odcinka CD .
 c) (4 punkty) Jaka może być największa wysokość DE domu, aby znajdował się on całkowicie w strefie ochronnej piorunochronu?

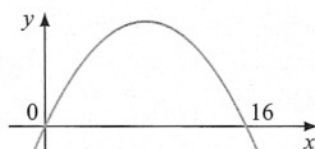
Liceum

13 (3 punkty) Rozwiąż nierówność $9x \geq -18$ i przedstaw na osi liczbowej jej rozwiązanie. Wyznacz najmniejsze naturalne rozwiązanie tej nierówności.

14⁶ Ściany magazynu w kształcie prostopadłościanu mają wysokość 4 m, a obwód jego podstawy wynosi 32 m.

- a) (1 punkt) Oznacz długość jednego boku podstawy w metrach przez x i pokaż, że pole podstawy jest równe $S(x) = 16x - x^2$.
 b) (1 punkt) Pokaż, że objętość magazynu jest równa $V(x) = -4x^2 + 64x$.
 c) (2 punkty) Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli $y = -4x^2 + 64x$, która jest wykresem funkcji V .

⁶ W podpunktach a) i b) w oryginale było po 2 punkty.



- d) (1 punkt) Wyznacz wartość długości boku podstawy x , dla której objętość $V(x)$ magazynu byłaby największa.
 e) (1 punkt) Wyznacz największą możliwą objętość magazynu.

Rozwiązania

1. a) $\frac{2}{9}$, b) $\frac{3}{50} = 0,06$, c) 16,
 d) $\sqrt{19} \approx 4,4$ e) 3,5.
 2. 132° .
 3. a) $x = 13$, b) $x = -1$ lub $x = 5$.
 4. a) $1,5a + 2b$, b) $a^2 + 9a + 9$.
 5. a) 16,
 b) $s = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 10}{16} = \frac{118}{16} = 7\frac{3}{8} = 7,375$,
 c) $\frac{2}{16} \cdot 100\% = 12,5\%$.
 6. a) 1,38 lt, b) 0,46 lt, c) 2,07 lt.
 7. $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. 8. a) $y = -1$, b) $x = 1$.
 9. $|CD| = |AB| = 3$, $S_{ABCD} = |CD| \cdot |BF| = 15 \text{ cm}^2$.
 10. a) $|\angle BAC| = 45^\circ$, $|\angle ABC| = 90^\circ$, zatem $|\angle BCA| = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$,
 b) z a) otrzymujemy, że trójkąt ABC jest równoramienny, czyli $|AB| = |BC| = 3 \text{ cm}$,
 c) Niech F oznacza spodek wysokości opuszczonej z punktu C , $|CF| = |AB| = 3 = |AF|$, $|DF| = |AD| - |AF| = 7 - 3 = 4$, z twierdzenia Pitagorasa $|CD|^2 = |CF|^2 + |DF|^2 = 25$, $|CD| = 5 \text{ cm}$,
 d) $O_{ABCD} = 18 \text{ cm}$.

11. $V = x \cdot 20 = (x - 12) \cdot 25$, $x = 60$,
 $V = 1200$ l.

12. a) $\frac{r}{2} = H = 30$ m, a zatem $r = 60$ m,

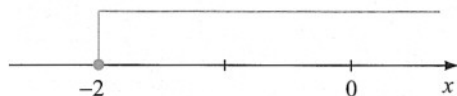
b) $|CD| = |OC| - |OD| = r - |OD| = 36$ m,

c) $|ED| = ?$ Z twierdzenia Talesa:

$$\frac{|CD|}{|ED|} = \frac{|CO|}{|OB|} = \frac{r}{H} = 2$$

zatem $|ED| = \frac{|CD|}{2} = 18$ m.

13. $x \geq -2$, najmniejsze naturalne rozwiązanie to $x = 0$.



14. a) $O_p = 2x + 2y$, zatem $x + y = 16$.
 Ponieważ $P_p = xy$, więc $P_p = x(16 - x) = -x^2 + 16x$,

b) $V = P_p \cdot H = (-x^2 + 16x) \cdot 4 = -4x^2 + 64x$,

c) $x_w = 8$ oraz $y_w = 256$,

d) $x = x_w = 8$,

e) $V_{\max} = y_w = 256$. □

WALERY JAGLIŃSKI

zastępca dyrektora Szkoły Średniej
 im. Szymona Konarskiego w Wilnie
<http://www.konarskio.vilnius.lm.lt>, nauczyciel
 technologii informacyjnej



Jedynie słuszna metoda?

■ EWA SZEWCZUK

W nauczaniu ważne jest zapoznanie uczniów z różnymi metodami rozwiązywania zadań i stwarzanie możliwości samodzielnego podejścia do problemu. Warto też zastanowić się, czy bardziej kształcące jest rozwiązanie na lekcji jednego zadania kilkoma sposobami, czy wielu zadań, każde innym sposobem. Zrozumienie możliwości dojścia do celu różnymi drogami pomaga uniknąć popadania w automatyzm.

W kartach pracy prezentuję trzy metody rozwiązywania zadań: w oparciu

o własności wartości bezwzględnej:

(1') $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \text{ lub } -f(x) \geq g(x),$

(2') $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ i } -f(x) \leq g(x) \text{ itd.}$

(3') $|f(x)| = g(x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow [-f(x) = g(x) \text{ lub } f(x) = g(x),$

na podstawie definicji wartości bezwzględnej i wykorzystującą wykresy funkcji. W ćwiczeniach pozostawiłam uczniom swobodę w dobieraniu metod.

EWA SZEWCZUK

nauczycielka XII LO we Wrocławiu

Więcej na ten temat w tekście Ewy Szewczuk *Jedynie słuszna metoda* „Matematyka” 6/2010